Billard convexe

Théorème : Soit K un compact de $\mathbb{R}^2$ dont le bord ∂K est une sous-variété $\mathcal{C}^1$ de dimension 1 de $\mathbb{R}^2$. Alors il existe une trajectoire fermée à trois rebonds vérifiant les lois de l'optique.

Démonstration :

$*$ On commence par montrer que $(\partial K)^3$ est une sous-variété $\mathcal{C}^1$ de dimension 3 de $\mathbb{R}^6$. Soit $(A,B,C) \in (\partial K)^3$. On fixe

$$\begin{array}{l} U_A \text{ un voisinage de } A \text{ dans } \mathbb{R}^2 \text{ et} \\ U_B \\ U_C \end{array}$$

une submersion

$$\begin{array}{lll} g_A : U_A \longrightarrow \mathbb{R} & \text{telle que} & U_A \cap \partial K = g_A^{-1}(\{0\}). \\ g_B : U_B \longrightarrow \mathbb{R} & & U_B \cap \partial K = g_B^{-1}(\{0\}). \\ g_C : U_C \longrightarrow \mathbb{R} & & U_C \cap \partial K = g_C^{-1}(\{0\}). \end{array}$$

Alors $U_A \times U_B \times U_C$ est un voisinage de (A,B,C) dans $\mathbb{R}^6$ et $g = (g_A, g_B, g_C) : U_A \times U_B \times U_C \longrightarrow \mathbb{R}^3$ est une submersion.

$*$ Soit $\varphi : \begin{array}{l} \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \\ (A,B) \longmapsto AB \end{array}$. Pour tous $(A,B), (\vec{a}, \vec{b}) \in \mathbb{R}^2$,

on a
$$\begin{aligned} \varphi(A+\vec{a}, B+\vec{b}) &= \langle \overrightarrow{(A+\vec{a})(B+\vec{b})}, \overrightarrow{(A+\vec{a})(B+\vec{b})} \rangle \\ &= \langle \vec{b} - \vec{a} + \overrightarrow{AB}, \vec{b} - \vec{a} + \overrightarrow{AB} \rangle \\ &= \varphi(A,B) + 2\langle \overrightarrow{AB}, \vec{b} - \vec{a} \rangle + o(\|(\vec{a}, \vec{b})\|) \end{aligned}$$

donc $d\varphi_{(A,B)}(\vec{a}, \vec{b}) = 2\langle \overrightarrow{AB}, \vec{b} - \vec{a} \rangle$. On pose $f : \begin{array}{l} \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R} \\ (A,B,C) \longmapsto AB + BC + CA \end{array}$.

Pour tous $(A,B,C) \in \mathbb{R}^3$ et $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) \in \mathbb{R}^3$, on a :

$$\begin{aligned} df_{(A,B,C)}(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) &= 2\langle \overrightarrow{AB}, \vec{b} - \vec{a} \rangle + 2\langle \overrightarrow{BC}, \vec{c} - \vec{b} \rangle + 2\langle \overrightarrow{CA}, \vec{a} - \vec{c} \rangle \\ &= 2\left[\langle \overrightarrow{CA} - \overrightarrow{AB}, \vec{a} \rangle + \langle \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BC}, \vec{b} \rangle + \langle \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{CA}, \vec{c} \rangle \right] \end{aligned}$$

La fonction f étant continue, sa restriction à $(\partial K)^3$ admet un maximum, atteint en (A,B,C). Par théorème des extrema liés, cela impose $df_{(A,B,C)}(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = 0$ pour tout $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) \in T_{(A,B,C)}(\partial K)^3$. (← notation pour l'espace tangent)

Cependant, le premier point permet d'affirmer que $T_{(A,B,C)}(\partial K)^3 = T_A \partial K \times T_B \partial K \times T_C \partial K$, donc pour tout $\vec{a} \in T_A \partial K$, on a $df_{(A,B,C)}(\vec{a}, \vec{0}, \vec{0}) = 0$, i.e $\langle \vec{AB}, \vec{a} \rangle = - \langle \vec{AC}, \vec{a} \rangle$, ce qui est la condition de rebond en A (représentée par les lois de l'optique).

Cette même condition étant vérifiée en B et C, on peut conclure.